

「近世代数」往年试题讲评

2024 刘班、叶班卷

骆沛荣

2025 年 4 月

中国科学技术大学数学科学学院

2023 级本科 3 班

1 2024 刘班期中

- 判断题
- 计算题
- 解答题

2 2024 叶班期中

2024 刘班期中

$\mathbb{Z}_n$ 总是表示整数模 n 加法群。

以下题目，除第一题与第二题外，均需要给出计算过程与证明过程。

2024 刘班期中

判断题

只需判断陈述是对还是错，无需写出证明。每小题 3 分，共 33 分。

判断题 (1)

判断题 (1)

27 阶群的中心一定至少有 3 个元素.

判断题 (1)

判断题 (1)

27 阶群的中心一定至少有 3 个元素.

正确.

若该群为 Abel 群, 则其中心有 27 个元素. 若为非 Abel 群, 我们有定理:

定理

设 p 为素数, p^3 阶非 Abel 群的中心一定为 p 个元素.

判断题 (1)

引理 1: 习题结论

$C(G)$ 为群 G 的中心, 且 $G/C(G)$ 为循环群. 求证: G 为 Abel 群.

判断题 (1)

引理 1: 习题结论

$C(G)$ 为群 G 的中心, 且 $G/C(G)$ 为循环群. 求证: G 为 Abel 群.

证明

不妨设 $G/C(G) = \langle \bar{g} \rangle$, 则存在 g 使 $gC(G) = \bar{g}$, 由正规子群可以验证得 $g^i C(G) = \bar{g}^i$.

因为 $G/C(G)$ 是循环群, 可作陪集分解 $G = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} g^i C(G)$, $\sqcup$ 表示不交并.

即 G 中元素均可表示为 $g^k x$ 的形式, 这里 k 为整数, $x \in C(G)$.

对任意 $a, b \in G$, 设 $a = g^i x$, $b = g^j y$, i, j 为整数, $x, y \in C(G)$, 则

$$ab = (g^i x)(g^j y) \stackrel{x, y \in C(G)}{=} g^{i+j} xy = (g^j y)(g^i x) = ba.$$

故 a, b 可交换. 由任意性, G 为 Abel 群.



判断题 (1)

引理 2: 类方程 (Class Equation)

对任意有限群 G 、其中心 $C(G)$ 及其各 (有两个及以上元素的) 共轭类 $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$, 其大小满足如下的方程:

$$|G| = |C(G)| + \sum_{i=1}^n |[x_i]|.$$

判断题 (1)

引理 2: 类方程 (Class Equation)

对任意有限群 G 、其中心 $C(G)$ 及其各 (有两个及以上元素的) 共轭类 $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$, 其大小满足如下的方程:

$$|G| = |C(G)| + \sum_{i=1}^n |[x_i]|.$$

证明

令 G 共轭作用于 G 自身: 定义 G 中元素 g 作用于 G 中元素 h 的结果是 $g \cdot h := ghg^{-1}$. 这一作用将被作用的 G 拆分为若干个轨道的无交并:

- 有的轨道只有一个元素 x . 说明 x 被 G 中任一元素 g 共轭作用得到的结果 gxg^{-1} 相同: 特别地, 都等于被单位元 1 作用的结果, 即自身 x . 说明 x 与 G 中任一元素可换, 因此 $x \in C(G)$.
- 有的轨道有两个及以上的元素. 由轨道的定义, 该轨道中任意两个元素 y, z , 都可以通过 G 中某元素 g 的共轭作用从一个变为另一个: $gyg^{-1} = z$. 所以这一轨道构成 G 中的一个共轭类.

上面说明, G 被拆分为若干轨道的无交并, 等价于其被拆为中心及各有两个及以上元素的共轭类的

无交并: $G = C(G) \sqcup \bigsqcup_{i=1}^n [x_i]$. 对两边取大小关系就得到类方程.



判断题 (1)

定理

设 p 为素数, p^3 阶非 Abel 群的中心一定为 p 个元素.

判断题 (1)

定理

设 p 为素数, p^3 阶非 Abel 群的中心一定为 p 个元素.

证明

由 Lagrange 定理: $|C(G)|$ 只能为 $1, p, p^2, p^3$. 由非 Abel 群知不能为 p^3 .

若为 1 , 将 G 共轭作用于自身拆分为轨道的无交并, 由轨道公式知每个长不为 1 的共轭类大小为 p 的倍数, 再由类方程知 $|C(G)|$ 是 p 的倍数, 矛盾.

若为 p^2 , 则 $G/C(G)$ 的大小为 p , $G/C(G)$ 是循环群, 由习题结论知 G 为 Abel 群, 矛盾.

综上, $|C(G)| = p$.

特别地, 取 $p = 3$, 得 27 阶非 Abel 群一定有 3 阶的中心.

至此, 第一问完全结束.

判断题 (2)

判断题 (2)

8 阶群必为 Abel 群,

判断题 (2)

判断题 (2)

8 阶群必为 Abel 群,

错误.

一个例子是 D_4 . 下面讲另一个比较重要的 8 阶群例子:

示例: Q_8 .

考虑四元数生成元群 Q_8 :

$$Q_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}.$$

这个群有六个 4 阶元: $i, j, k, -i, -j, -k$; 一个 2 阶元: -1 . 是非 Abel 群, 例如 $ij \neq ji$.

判断题 (2)

判断题 (2)

8 阶群必为 Abel 群,

错误.

一个例子是 D_4 . 下面讲另一个比较重要的 8 阶群例子:

示例: Q_8 .

考虑四元数生成元群 Q_8 :

$$Q_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}.$$

这个群有六个 4 阶元: $i, j, k, -i, -j, -k$; 一个 2 阶元: -1 . 是非 Abel 群, 例如 $ij \neq ji$.

这个群的另一重要特性是其为哈密顿群 (Hamiltonian Group): 所有子群都是正规子群, 但不是 Abel 群. 其子群要么为 4 阶, 则其指数为 2, 从而是正规子群; 要么为 2 阶, 则该群是 $\langle -1 \rangle$, 同样可以验证其正规.

判断题 (3)

判断题 (3)

循环群的商群必为循环群.

判断题 (3)

判断题 (3)

循环群的商群必为循环群.

正确.

证法一：直接验证

每个循环群都同构于 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}_m$, 只需验证它们就可以.

$\mathbb{Z}$ 的商群就是 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, 也就是 $\mathbb{Z}_m$, 所以是循环群.

$\mathbb{Z}_m$ 的商群只能为 $\mathbb{Z}_n$, 这里 n 是 m 的一个因子, 也是循环群.

综上, 循环群的商群必为循环群.



证法二：同态基本定理

同态基本定理告诉我们：如果群 A/B 是群 A 的商群, 则存在一个满同态 $\varphi: A \rightarrow A/B$, 核为 B .

设 g 是 A 的生成元, 则 $\varphi(g)$ 是 φ 的像 $\text{im } \varphi$ 的生成元, 其生成整个像.

因此 $\text{im } \varphi$ 是循环群; 再由满同态, 故商群 $A/B = \text{im } \varphi$, 是循环群.



判断题 (4)

判断题 (4)

31 阶群必为循环群.

判断题 (4)

判断题 (4)

31 阶群必为循环群.

正确.

证明

31 是个质数.

判断题 (4)

判断题 (4)

31 阶群必为循环群.

正确.

证明

31 是个质数.

请大家谨记: 57 不是质数!!!!!!

判断题 (5)

判断题 (5)

设群 G 由元素 a 和 b 生成, 且 a 与 b 的阶分别为 m 与 n , 则 $|G| \leq mn$.

判断题 (5)

判断题 (5)

设群 G 由元素 a 和 b 生成, 且 a 与 b 的阶分别为 m 与 n , 则 $|G| \leq mn$.

错误.

考试的方法: 对照条件

什么时候 $|G| = mn$? 如果 a 和 b 可换, 则 G 中元素形如 $G = \{a^i b^j : 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1\}$, 确实是 mn 阶的. 但是题目中没有可换条件, 能否保证? 感觉大概率是错的, 先选错吧.

反例

设 a, b 是 $\mathbb{Z}$ 上的置换, 定义为:

$$a = (12)(34)(56) \cdots, \quad b = (23)(45)(67) \cdots$$

令 $\sigma = ba$, 验证可知 $\sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = 5, \sigma^3(1) = 7, \dots, \sigma^n(1) = 2n+1$, 说明 $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \dots$ 个个都不同. 但它们都在群 G 里面, 因此 G 有无数个元素, 矛盾!

判断题 (6)

判断题 (6)

设 G 为有限生成自由 Abel 群, 则存在 G 的真子群 A 使得 G 与 A 同构.

判断题 (6)

判断题 (6)

设 G 为有限生成自由 Abel 群, 则存在 G 的真子群 A 使得 G 与 A 同构.

正确.

证明

由题知 G 同构于 $\mathbb{Z}^r$, 只需对 $\mathbb{Z}^r$ 考虑即可.

注意到 $\mathbb{Z}^r = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{r-1}$, 因此 $2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{r-1}$ 是一个真子群, 但显然

$$(x_1, x_2, \dots, x_r) \mapsto (2x_1, x_2, \dots, x_r)$$

是 $\mathbb{Z}^r$ 到 $2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{r-1}$ 间的一个同构, 这就说明本题正确.



判断题 (7)

判断题 (7)

存在 48 阶非交换单群.

判断题 (7)

判断题 (7)

存在 48 阶非交换单群.

错误.

课本定理

最小非交换单群为 A_5 , 60 阶.

判断题 (8)

判断题 (8)

100 阶群中必有 4 阶元素.

判断题 (8)

判断题 (8)

100 阶群中必有 4 阶元素.

错误.

反例

考虑有限生成 Abel 群: $\mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$. 这一群中没有 4 阶元.

判断题 (9)

判断题 (9)

25 阶群必为 Abel 群

判断题 (9)

判断题 (9)

25 阶群必为 Abel 群

正确.

证明

课本定理: p^2 阶群必为 Abel 群.

也可以类似第 (1) 问, 对 $|C(G)| = 1$ 时应用类方程导出矛盾, 对 $|C(G)| = 5$ 应用 $G/C(G)$ 为循环群导出矛盾, 从而得到 $|C(G)| = 25$.

判断题 (10)

判断题 (10)

记 $S = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) : \det A \neq 0\}$, 则 S 按照矩阵的乘法构成群.

判断题 (10)

判断题 (10)

记 $S = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) : \det A \neq 0\}$, 则 S 按照矩阵的乘法构成群.

错误.

反例

取 $n = 2$, 则 $\begin{pmatrix} 142 & \\ & 857 \end{pmatrix} \in S$ 的逆为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{142} & \\ & \frac{1}{857} \end{pmatrix}$, 不在 $M_n(\mathbb{Z})$ 中, 从而也不在 S 中, 即 S 对逆运算不封闭.

判断题 (11)

判断题 (11)

设 N 为群 M 的正规子群, M 为 G 的正规子群, 则 N 为 G 的正规子群.

判断题 (11)

判断题 (11)

设 N 为群 M 的正规子群, M 为 G 的正规子群, 则 N 为 G 的正规子群.

错误.

反例

$\mathbb{Z}_2 \cong \{1, (12)(34)\} \triangleleft K_4$, $K_4 \triangleleft S_4$, 但 $\mathbb{Z}_2 \not\triangleleft S_4$:

$$(1234)(12)(34)(1234)^{-1} = (23)(14) \neq (12)(34).$$

这里 K_4 是 Klein 四元群: $\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

两个重要的正规子群例子:

- ① 对群 G , 如果子群 H 的指数 $[G : H] = 2$, 则 H 是正规子群;
- ② A_n 是 S_n 的正规子群; 特别地, S_4 的正规子群有 A_4 和 K_4 .

2024 刘班期中

计算题

只需写出答案，无需写出计算过程（15 分）.

计算题 (1)

计算题 (1)

设 $G = \mathbb{Z}_{30}$ 且 A 是 G 中由 $\bar{5}$ 生成的子群, 计算 $[G : A]$.

计算题 (1)

计算题 (1)

设 $G = \mathbb{Z}_{30}$ 且 A 是 G 中由 $\bar{5}$ 生成的子群, 计算 $[G : A]$.

$$A = \langle \bar{5} \rangle = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}, \quad |A| = 6.$$

$$[G : A] = \frac{|G|}{|A|} = \frac{30}{6} = \boxed{5}.$$

计算题 (2)

计算题 (2)

写出 $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{25}$ 的初等因子与不变因子.

计算题 (2)

计算题 (2)

写出 $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{25}$ 的初等因子与不变因子.

计算初等因子组：先拆成最简形式

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5) \oplus \mathbb{Z}_{25} \\ &= \mathbb{Z}_3^2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{5^2}.\end{aligned}$$

得初等因子组为 $(3, 3, 3^2, 5, 5^2)$.

计算不变因子组：把初等因子组按质数排成列，幂次由高到低往下写：

3	5	乘积
3^2	5^2	225
3	5	15
3		3

故不变因子组为 $(225, 15, 3)$.

计算题 (3)

计算题 (3)

写出 1000 阶 Abel 群所有可能的初等因子与对应的不变因子.

计算题 (3)

计算题 (3)

写出 1000 阶 Abel 群所有可能的初等因子与对应的不变因子.

$1000 = 2^3 \times 5^3$, 下面只需要对各种乘法组合一个一个列出来, 再按照 (2) 的方法计算就可以了.

初等因子组	不变因子组
(2, 2, 2, 5, 5, 5)	(10, 10, 10)
(2, 4, 5, 5, 5)	(20, 10, 5)
(8, 5, 5, 5)	(40, 5, 5)
(2, 2, 2, 5, 25)	(50, 10, 2)
(2, 4, 5, 25)	(100, 10)
(8, 5, 25)	(200, 5)
(2, 2, 2, 125)	(250, 2, 2)
(2, 4, 125)	(500, 2)
(8, 125)	1000

2024 刘班期中

解答题

第三题

第三题 (10 分)

找出所有从加法群 $\mathbb{Z}_{12}$ 到加法群 $\mathbb{Z}_{20}$ 的群同态.

第三题

第三题 (10 分)

找出所有从加法群 $\mathbb{Z}_{12}$ 到加法群 $\mathbb{Z}_{20}$ 的群同态.

深度思考：嗯，如果一个群同态能从 $\mathbb{Z}_{12}$ 打到 $\mathbb{Z}_{20}$ ，它会满足什么条件呢？

说到同态就要想到同态基本定理. 同态基本定理表明，如果 $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{20}$ 是一个同态，则存在一个同构 $\mathbb{Z}_{12}/\ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi$ ，这里 $\ker \varphi$ 是核，它是 $\mathbb{Z}_{12}$ 的一个正规子群； $\operatorname{im} \varphi$ 是像，它是 $\mathbb{Z}_{20}$ 的一个子群. 这能说明什么呢？

不如先给上面这个同构，两边同时取个“集合大小”看一看吧. 由 Lagrange 定理和商群的性质，我们得到

$$12 = |\mathbb{Z}_{12}| = |\ker \varphi| \cdot |\operatorname{im} \varphi|, \quad |\operatorname{im} \varphi| \mid |\mathbb{Z}_{20}| = 20.$$

后面这个条件给出 $\operatorname{im} \varphi$ 的大小只能为 1, 2, 4, 5, 10 或 20. 但如果大小是 5, 10 或 20，前面的等式就分别给出 $\ker \varphi$ 的大小是 $\frac{12}{5}$, $\frac{6}{5}$ 或 $\frac{3}{5}$ ，所以有分数个元素！显然不可能. 所以只能是 1, 2 或 4. 1 的情况就是平凡同态，2 就是一个二阶元，那就是由 $\{0, 10\}$ ，4 对应什么呢？注意到 $\mathbb{Z}_{12}$ 是循环群，所以像应该也是循环群，4 的情况对应于 $\{0, 5, 10, 15\}$. 像是大概讨论完成了，最后完善一下对应关系就做完了吧.

第三题

第三题 (10 分)

找出所有从加法群 $\mathbb{Z}_{12}$ 到加法群 $\mathbb{Z}_{20}$ 的群同态.

解答: 设 $\varphi: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{20}$ 是一个同态, 由同态基本定理得 $\mathbb{Z}_{12}/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi$, 所以

$$|\ker \varphi| \cdot |\text{im } \varphi| = |\mathbb{Z}_{12}| = 12.$$

另一方面, $\text{im } \varphi$ 是 $\mathbb{Z}_{20}$ 的子群, 由 Lagrange 定理知 $|\text{im } \varphi|$ 是 $|\mathbb{Z}_{20}| = 20$ 的因子. 再由 $|\ker \varphi|$ 是整数, 得 $|\text{im } \varphi| = 1, 2$ 或 4 . 因为 $\mathbb{Z}_{12}$ 是循环群, 所以 $\text{im } \varphi$ 可能为 $0, \{0, 10\}$ 或 $\{0, 5, 10, 15\}$.

- 如果 $\text{im } \varphi = 0$, 则 φ 为平凡同态: $\varphi(x) = 0$.
- 如果 $\text{im } \varphi = \{0, 10\}$, 考虑生成元的像 $\varphi(1)$: 若 $\varphi(1) = 0$, 则 $\varphi(x) = 0$, 矛盾; 若 $\varphi(1) = 10$, 则 $\varphi(x) = 10 \cdot (x \bmod 2)$.
- 如果 $\text{im } \varphi = \{0, 5, 10, 15\}$, 考虑 $\varphi(1)$: 若为 0 则 $\varphi(x) = 0$, 若为 5 则 $\varphi(x) = 5 \cdot (x \bmod 4)$, 若为 10 则为 $\varphi(x) = 10 \cdot (x \bmod 2)$, 若为 15 则为 $\varphi(x) = 15 \cdot (x \bmod 4)$. 检验知只有 5 和 15 时满足条件.

综上, 所有可能的同态是 $x \mapsto 0$, $x \mapsto 5 \cdot (x \bmod 4)$, $x \mapsto 10 \cdot (x \bmod 2)$, $x \mapsto 15 \cdot (x \bmod 4)$. □

第四题

第四题 (8 分)

设 A 为 G 的子群, $[G : A] = 2$, 求证对任意 $g \in G$ 有 $g^2 \in A$.

第四题

第四题 (8 分)

设 A 为 G 的子群, $[G : A] = 2$, 求证对任意 $g \in G$ 有 $g^2 \in A$.

深度思考: 嗯, 我现在要证明一个指数为 2 的子群有关的结论. 题目中已经明确了 $[G : A] = 2$, 这不禁让我们想到这个问题: 如果 $[G : A] = 2$, 则 A 是正规子群. 我记得当时的做法是将 G 对 A 拆分为陪集的不交并: $G = A \sqcup mA$, 再对 g 属于 A 还是 mA 作讨论. 我们现在应该也可以这么做?

试一试吧. 首先 $G = A \sqcup mA$, 那么如果 $g \in A$, 显然 $g^2 \in A$ 了. 如果 $g \in mA$, 好像不好说明. 要不先试试看能不能证 $m^2 \in A$? 试试反证: 假设 $m^2 \notin A$, 那就有 $m^2 \in mA$, 也就是 $m = m^{-1}m^2 \in m^{-1}mA = A$, 这显然是矛盾的, 因为代表元 $m \in mA$, 不能在 A 里面!

那命题对 $g = m$ 就成立啦. 对一般的 $g \in mA$, 有什么好方法呢? 不如先表示为 $g = ma$, $a \in A$ 看看, 这时 $g^2 = mama$, 我们要证的事实上就等价于 $mam \in A$. 也试试反证吧: 如果 $mam \in mA$, 那就有 $am \in A$, 由 $a \in A$ 得 $m \in A$, 这当然是矛盾的. 看来直接用这样的思路就能做, 那就开始写证明吧!

第四题

第四题 (8 分)

设 A 为 G 的子群, $[G : A] = 2$, 求证对任意 $g \in G$ 有 $g^2 \in A$.

证明: 对 G 作陪集分解: $G = A \sqcup mA$, 这里 $m \in G \setminus A$. 对任意的 $g \in G$, 讨论以下两种情形:

- 如果 $g \in A$, 由 A 为子群, 故 $g^2 \in A$.
- 如果 $g \in mA$, 不妨设 $g = ma$, $a \in A$, 则 $g^2 = mama$. 设若 $g^2 \notin A$, 则 $g^2 \in mA$, 从而 $mama \in mA$. 由 $a \in A$ 知 $mam \in mA$, 两边同时左乘 m^{-1} 得 $am \in A$, 再由 $a \in A$ 得 $m \in A$, 矛盾! 故 $g^2 \in A$.

综上, $g^2 \in A$.



第五题

第五题 (10 分)

设 H, K 均为 G 的正规子群, 且 $G = HK$, 求证: $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$.

第五题

第五题 (10 分)

设 H, K 均为 G 的正规子群, 且 $G = HK$, 求证: $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$.

深度思考: 嗯, 左边是一个商式, 右边是两个商群的直积. 题目让我们证明一个同构, 证明同构无非是两种方式:

- ① 硬性构造出一些同构或同态: 同构的本质是双射的同态, 可以尝试下构造一些同态, 再用第一同态定理造出来同构.
- ② 通过一些能够诱导出同构的定理来证明同构, 例如同态定理或其它的一些小结论.

两种方法其实都可以, 这里两种都讲一下.

第五题：法一

第五题 (10 分)

设 H, K 均为 G 的正规子群, 且 $G = HK$, 求证: $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$.

法一 (同态法): 考虑到欲证的式子本质上是这样的结构:

$$\square / \triangle \cong \circ$$

只是 $\circ$ 的一项是两个东西的直积而已. 由此可以想到, 是不是可以构造一个同态, 看看是什么结果. 来看看吧. 如果用第一同态定理, 意味着这个同态 φ 应该从 G 打到 $G/H \times G/K$, 核是 $H \cap K$, 并且应该是满射. 这样的同态怎么构造?

先不管那么多要求, 我们来看看 G 打到 $G/H \times G/K$ 最简单的一种同态: $g \mapsto (gH, gK)$. 接下来应当验证同态的良定性、满射性等.

第五题：法一

第五题 (10 分)

设 H, K 均为 G 的正规子群, 且 $G = HK$, 求证: $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$.

证明 (同态法) 构造映射

$$\varphi: G \rightarrow G/H \times G/K, \quad g \mapsto (gH, gK).$$

则这一映射是良定的. 我们来验证 φ 是同态、满, 并通过核和同态定理来导出结论.

第一步 我们先验证其为同态: 对任意 $g_1, g_2 \in G$, 有

$$\begin{aligned} \varphi(g_1)\varphi(g_2) &= (g_1H, g_1K)(g_2H, g_2K) = (g_1H \cdot g_2H, g_1K \cdot g_2K) \\ &\quad \underline{\text{商群自带乘积性质}} (g_1g_2H, g_1g_2K) = \varphi(g_1g_2). \end{aligned}$$

从而 φ 是一个同态.

第五题：法一

第五题 (10 分)

设 H, K 均为 G 的正规子群, 且 $G = HK$, 求证: $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$.

证明 (同态法) 构造映射

$$\varphi: G \rightarrow G/H \times G/K, \quad g \mapsto (gH, gK).$$

则这一映射是良定的. 我们来验证 φ 是同态、满, 并通过核和同态定理来导出结论.

第二步: 下面验证其满. 首先由 H, K 均为正规子群, 故 $HK = KH$. 对任意 $(g_1H, g_2K) \in G/H \times G/K$, 由 $G = HK = KH$, 设 $g_1 = kh$, $g_2 = h\mathfrak{k}$, 这里 $h, \mathfrak{h} \in H$, $k, \mathfrak{k} \in K$. 于是 $(g_1H, g_2K) = (kH, hK)$.

令 $g = hk$, 由 $H \triangleleft G$ 知存在 $h' \in H$ 使 $k^{-1}hk = h'$, 即 $hk = kh'$, 于是

$$\varphi(g) = (kh'H, h\mathfrak{k}K) = (kH, hK) = (g_1H, g_2K).$$

故存在 g 使 $\varphi(g) = (g_1H, g_2K)$.

第五题：法一

第五题 (10 分)

设 H, K 均为 G 的正规子群, 且 $G = HK$, 求证: $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$.

证明 (同态法) 构造映射

$$\varphi: G \rightarrow G/H \times G/K, \quad g \mapsto (gH, gK).$$

则这一映射是良定的. 我们来验证 φ 是同态、满, 并通过核和同态定理来导出结论.

第三步: 下面, 我们考虑它的核. $g \in \ker \varphi$ 当且仅当 $(gH, gK) = \varphi(g) = \bar{1} = (H, K)$, 当且仅当 $g \in H$ 且 $g \in K$, 当且仅当 $g \in H \cap K$. 这说明 $\ker \varphi = H \cap K$.

因此, φ 的核为 $H \cap K$, 由满射知像为 $G/H \times G/K$, 由第一同态定理得

$$G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K.$$

证毕!



第五题：法二

第五题 (10 分)

设 H, K 均为 G 的正规子群, 且 $G = HK$, 求证: $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$.

法二 (定理法): 当然不只可以通过构造同态的方式证明, 也可以借助一些定理直接推出同构, 不过这一推导会有很多陷阱, 需要注意.

左侧的 $H \cap K$ 让我们想起第二同态定理: $H/(H \cap K) \cong KH/K$, 恰巧 $G = KH = HK$, 这会给出 $G/K \cong H/(H \cap K)$. 试试把右边 G/H 换掉, 欲证的式子变成:

$$G/(H \cap K) = G/H \times H/(H \cap K).$$

好像就要出来了, 看上去就是一个非常对的式子! 如果直积是乘法而作商是除法就好了 (笑)

接下来怎么办呢? 右边没啥思路, 先从左边看起吧, 看能不能化出右边的样子. 由于 $G = KH$, 换一下得到

$$G/(H \cap K) = (KH)/(H \cap K) \xrightarrow[\text{事后发现是对的}]{\text{天马行空来猜想}} (K/(H \cap K))(H/(H \cap K))$$

诶, $H/(H \cap K)$ 出来了! 不仅如此, 对左边的 $K/(H \cap K)$ ——显然也是第二同态定理的结构, 换成 HK/H , 这不恰好就是 G/H 嘛!

说明这一思路很可能是对的. 余下只需说明这个积是直积就行——验证交为 1 的直积条件.

第五题：法二

第五题 (10 分)

设 H, K 均为 G 的正规子群, 且 $G = HK$, 求证: $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$.

证明 (定理法): 因为 K, H 均为正规子群, 所以 $KH = HK$, 且 $H \cap K$ 也为正规子群. 注意到

$$1 \subset H/(H \cap K) \cap K/(H \cap K) \subset (H \cap K)/(H \cap K) = 1$$

因此

$$\begin{aligned} G/(H \cap K) &= (KH)/(H \cap K) && (G=HK=KH) \\ &= (K/(H \cap K))(H/(H \cap K)) && (\text{商群的性质}) \\ &\cong K/(H \cap K) \times H/(H \cap K) && (\text{直积的判别法}) \\ &\cong HK/H \times KH/K && (\text{第二同态定理、直积的性质}) \\ &\cong G/H \times G/K. && (KH=HK=G) \end{aligned}$$

即证. □

第五题：结语

第五题 (10 分)

设 H, K 均为 G 的正规子群, 且 $G = HK$, 求证: $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$.

以上, 我们通过两种方法证明了这道题:

一种方法是想到第一同态定理, 通过构造同态、验证满射来得出结论, 做法比较直接、易想, 是比较基础的想法, 只是篇幅很长.

另一种方法是通过定理来得到结论, 技巧性强. 确实写起来短多了, 但是不太好想——想法中的逻辑链条很长, 因此这一方法需要对定理足够熟悉才能完成.

这两种方法哪种更好呢? 其实理论上不分优劣, 但在考试实践中, 更推荐大家选择更直接简便的证法一, 毕竟比较正规、正统, 方法分点清晰, 写起来不容易出错, 写不出来助教也好给过程分 (笑).

第六题

第六题 (10 分)

设 $|G| = 360$ 且 G 为单群, 设 G 存在阶为 60 的子群, 求证 $G \cong A_6$.

第六题

第六题 (10 分)

设 $|G| = 360$ 且 G 为单群, 设 G 存在阶为 60 的子群, 求证 $G \cong A_6$.

深度思考: 嗯, 这是一个有关单群的问题, 还让我们证明同构于 A_6 ——不由得让我们想到《引论》Sylow 定理那一章里有关 60 阶单群必为 A_5 的定理.

还记得那一定理的证明中, 用到了 60 阶群的 12 阶子群, 通过对其左诱导作用, 用 $\frac{60}{12} = 5$ 得出了 A_5 的结论. 现在让我们证明当 360 阶单群有 60 阶子群时必为 A_6 , 想来应当也是一样的方法. 既然是这样, 那我们来模仿一下原题的证明.

第六题

第六题 (10 分)

设 $|G| = 360$ 且 G 为单群, 设 G 存在阶为 60 的子群, 求证 $G \cong A_6$.

证明: 设 H 为 G 的 60 阶子群, 并令 Σ 为 G 对 H 的陪集族, 则 $|\Sigma| = [G : H] = 6$.

设 G 对 Σ 作左诱导作用, 此作用诱导出一个同态:

$$\varphi : G \rightarrow S(\Sigma) \cong S_6, \quad g \mapsto (aH \mapsto gaH).$$

注意到 $\ker \varphi$ 是 G 的正规子群, 但 G 是单群, 因此 $\ker \varphi = 1$ 或 G . 但 $\ker \varphi$ 不能为 G , 否则 φ 就只能是恒等映射了, 矛盾. 因此 $\ker \varphi = 1$, 从而 φ 是一个嵌入 (单同态), G 同构于 S_6 的一个 360 阶子群 A .

下面验证 A 就是 A_6 . 由于 $|S_6| = 6! = 720$, 由 $|A| = 360$, 故 $[S_6 : A] = 2$, 因此 A 是 S_6 的一个正规子群. 但 A_6 也是正规子群, 故 $A \cap A_6$ 也是 S_6 的一个正规子群, 从而也是 A_6 的正规子群, 故 $A \cap A_6$ 只能要么为 1, 要么为 A_6 .

如果 $A \cap A_6 = 1$, 则 $A \cup A_6$ 有 $720 - 1 = 719$ 个元素; 特别地, 因为 A_6 为偶置换群, 故 A 中至少包含全体对换 (奇置换) 中的 $\frac{6 \times 5}{2} - 1 = 14$ 个, 但这么多对换足以生成 S_6 , 因此 $S_6 \leq A$, 矛盾!

故 $A \cap A_6 = A_6$, 从而 $A = A_6$. 因为 $G \cong A$, 所以 $G \cong A_6$. □

第七题

第七题 (14 分)

找出 A_4 的所有正规子群与所有 Sylow 子群，并计算所有 Sylow 子群的个数.

第七题

第七题 (14 分)

找出 A_4 的所有正规子群与所有 Sylow 子群，并计算所有 Sylow 子群的个数.

深度思考: A_4 也就 $\frac{4!}{2} = 12$ 个元素, 不妨把元素确定了, 再把子群一个个列出来找 (笑)

因为 A_4 是偶置换构成的群, 我们看看 4 个元素的置换可能是什么样子. 从型的角度, S_4 中的偶置换只可能形如 1^4 (恒等)、 2^2 和 $1^1 3^1$ 的形式, 也就是单位元、两个不交的对换之积及三轮换. 从阶数的角度看, 共中的元素只有单位元、二阶元和三阶元.

子群可能有哪些呢? 根据 Lagrange 定理, 子群的阶数只可能为 1、2、3、4、6、12. 另一方面, 正规子群一定由单位元及共轭类拼成, 所以只需要从 A_4 的共轭类出发, 试试看拼一拼就知道正规子群是谁了.

Sylow 子群呢? $|A_4| = 12 = 2^2 \times 3$, Sylow 2-子群为 4 阶, 3-子群为 3 阶, 我们慢慢来算算看.

第七题

第七题 (14 分)

找出 A_4 的所有正规子群与所有 Sylow 子群, 并计算所有 Sylow 子群的个数.

解答 注意 A_4 中包含的共轭类为

$$\begin{array}{ll} [1^4] & \text{单位元, 1 个} \\ [2^2] & \text{不交对换之积, 3 个} \\ [1^1 3^1] & \text{三轮换, 8 个} \end{array}$$

若一个 A_4 的子群为正规子群, 则其必由共轭类组成. 另一方面, 由 Lagrange 定理, 其大小只能为 1, 2, 3, 4, 6, 12. 大小为 1 及 12 的子群是平凡的, 而大小为 2、3、6 的子群不能由上面的共轭类拼成.

对大小为 4 的子群, 注意到 $K_4 = [1^4] \cup [2^2]$ 可由共轭类拼成, 因此 K_4 是一个正规子群.

综上, 正规子群有且仅有 K_4 .

最后, 因为 $12 = 2^2 \times 3$, 因此 Sylow 2-子群为 4 阶群 K_4 , Sylow 3-子群为由任一三轮换生成的循环群. □

2024 叶班期中

2024.4.26

第一题

第一题 (15 分)

- ① 设一群 G 的阶为 p^r , 其中 p 为素数, 而 r 为正整数, 证明该群有非平凡的中心。
- ② 设一群 G 的阶为 27, 且非交换, 证明该群的中心同构于 3 阶循环群。
- ③ 举一 27 阶非交换群的例子。

第一题

第一题 (15 分)

- ① 设一群 G 的阶为 p^r , 其中 p 为素数, 而 r 为正整数, 证明该群有非平凡的中心。
- ② 设一群 G 的阶为 27, 且非交换, 证明该群的中心同构于 3 阶循环群。
- ③ 举一 27 阶非交换群的例子。

简评：本题其实就是刘班考试判断题的第一题，只不过刘班的是判断题还能蒙，这里蒙不了了（笑）过程也是类似的，第一问用类方程——不过不能直接写出来，要改写成群作用的形式。第二题其实就是 p^3 阶群。第三题的一个例子是我们之前在上一场班会提过的 Heisenberg 群。

第一题

第一题 (15 分)

- ❶ 设一群 G 的阶为 p^r , 其中 p 为素数, 而 r 为正整数, 证明该群有非平凡的中心。
- ❷ 设一群 G 的阶为 27, 且非交换, 证明该群的中心同构于 3 阶循环群。
- ❸ 举一 27 阶非交换群的例子。

1. 证明: 令 G 共轭作用于 G 自身: 定义 G 中元素 g 作用于 G 中元素 h 的结果是 $g \cdot h := ghg^{-1}$. 这一作用将被作用的 G 拆分为若干个轨道的无交并:

- 有的轨道只有一个元素 x . 说明 x 被 G 中任一元素 g 共轭作用得到的结果 gxg^{-1} 相同: 特别地, 都等于被单位元 1 作用的结果, 即自身 x . 说明 x 与 G 中任一元素可换, 因此 $x \in C(G)$.
- 有的轨道有两个及以上的元素. 由轨道的定义, 该轨道中任意两个元素 y, z , 都可以通过 G 中某元素 g 的共轭作用从一个变为另一个: $gyg^{-1} = z$. 所以这一轨道构成 G 中的一个共轭类。

上面说明, G 被拆分为若干轨道的无交并, 等价于其被拆为中心及各有两个及以上元素的共轭类的

无交并: $G = C(G) \sqcup \bigsqcup_{i=1}^n [x_i]$. 两边取大小得 $p^r = |G| = |C(G)| + \sum_{i=1}^n |[x_i]|$.

由轨道公式: $|[x_i]| = [G : N_G(x_i)] = \frac{|G|}{|N_G(x_i)|}$ 是 $|G| = p^r$ 的因子. 由长不为 1, 故长是 p 的倍数, 代入上式即得 $|C(G)|$ 是 p 的倍数, 故 $C(G) \neq 1$ 非平凡. □

第一题

第一题 (15 分)

- ① 设一群 G 的阶为 p^r , 其中 p 为素数, 而 r 为正整数, 证明该群有非平凡的中心。
- ② 设一群 G 的阶为 27, 且非交换, 证明该群的中心同构于 3 阶循环群。
- ③ 举一 27 阶非交换群的例子。

2. 证明: 由 Lagrange 定理, $|C(G)| = 1, 3, 9$ 或 27, 上一问已说明 $|C(G)| \neq 1$, 由非交换知 $|C(G)| \neq 27$.

假设 $|C(G)| = 9$, 则 $G/C(G)$ 是三阶群, 故为循环群, 设

$$G/C(G) = \langle \bar{g} \rangle, \quad \bar{g} = gC(G), \quad g \in G \setminus C(G).$$

那么 $\bar{g}^i = g^i$, $i = 0, 1, 2$, 因此对任意 $h \in G$, 可设 $h = g^i x$, $i \in \{0, 1, 2\}$, $x \in C(G)$.

对任意 $a = g^i x \in G$, $b = g^j y \in G$, 这里 $i, j \in \{0, 1, 2\}$, $x, y \in C(G)$, 我们有

$$ab = (g^i x)(g^j y) = g^{i+j} xy = (g^j y)(g^i x) = ba.$$

其中, 第二、三个等号是因为 $x, y \in C(G)$, 所以与 g 可换. 由上知 G 为 Abel 群, 这与 G 非交换矛盾.

综上, $|C(G)| = 3$.



第一题

第一题 (15 分)

- ① 设一群 G 的阶为 p^r , 其中 p 为素数, 而 r 为正整数, 证明该群有非平凡的中心.
- ② 设一群 G 的阶为 27, 且非交换, 证明该群的中心同构于 3 阶循环群.
- ③ 举一 27 阶非交换群的例子.

3. 解答: 考虑上三角矩阵群 (Heisenberg 群)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

显然其关于矩阵乘法封闭, 且满足结合律、有么元、可逆. 但另一方面

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

因此该群非交换. 这就给出了一个 27 阶非交换群的例子.



第二题

第二题 (25 分)

设 M 为一有限半群, 定义左幺元为 M 中的一元素 e , 使 $ex = x, \forall x \in M$; 称 M 有左消去律, 若对任意的 $x, y, z \in M$, 若 $xy = xz$ 就有 $y = z$. 类似定义右幺元和右消去律.

- 1. 若 M 同时有左幺元和右幺元, 证明 M 为幺半群.
- 2. 若 M 有左消去律, 证明 M 有左幺元.
- 3. 证明 M 为群当且仅当 M 同时有左消去律和右消去律.
- 4. 举一有左消去律但无右消去律的半群的例子 (不要求有限).
- 5.3 中的结论对无限半群成立吗? 给出你的判断并陈述理由.

第二题

第二题 (25 分)

设 M 为一有限半群，定义左幺元为 M 中的一元素 e ，使 $ex = x, \forall x \in M$ ；称 M 有左消去律，若对任意的 $x, y, z \in M$ ，若 $xy = xz$ 就有 $y = z$ 。类似定义右幺元和右消去律。

- 1. 若 M 同时有左幺元和右幺元，证明 M 为幺半群。
- 2. 若 M 有左消去律，证明 M 有左幺元。
- 3. 证明 M 为群当且仅当 M 同时有左消去律和右消去律。
- 4. 举一有左消去律但无右消去律的半群的例子（不要求有限）。
- 5.3 中的结论对无限半群成立吗？给出你的判断并陈述理由。

简评：除了第六题外，本题为全卷最难题，涉及半群性质的讨论，这在复习中比较难覆盖，应当注意。

第一问是常规的“左幺 = 右幺”性质，属于送分，当熟练掌握。

第二问、三问是“有限”二字发挥的场所——有限群中涉及阶数的抽屉原理技巧。

第五问涉及无限半群和群的性质，应思考半群与群之间差的条件是什么：不止是逆元哦。

第四问建议跳过。

第二题

第二题 (25 分)

设 M 为一有限半群, 定义左幺元为 M 中的一元素 e , 使 $ex = x, \forall x \in M$; 称 M 有左消去律, 若对任意的 $x, y, z \in M$, 若 $xy = xz$ 就有 $y = z$. 类似定义右幺元和右消去律.

- 若 M 同时有左幺元和右幺元, 证明 M 为幺半群.

1. 证明: 设左幺元为 e_1 , 右幺元为 e_2 , 则

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2$$

因此左、右幺元相等, 设其为 e , 则 e 为幺元.



第二题

第二题 (25 分)

设 M 为一有限半群, 定义左幺元为 M 中的一元素 e , 使 $ex = x, \forall x \in M$; 称 M 有左消去律, 若对任意的 $x, y, z \in M$, 若 $xy = xz$ 就有 $y = z$. 类似定义右幺元和右消去律.

- 若 M 有左消去律, 证明 M 有左幺元.

2. 证明: 固定 $b \in M$. 若 b 是左幺元, 已证. 下面讨论 b 不是左幺元的情况.

如果 b 不是左幺元, 考虑 $b, b^2, b^3, \dots$. 由于这些元素均为 M 中元素, 而 M 是有限半群, 由抽屉原理知存在 $m > n \in \mathbb{N}$, 使得

$$b^m = b^n. \quad (*)$$

因此, 对任意的 $a \in M$, 右乘在上式两边得

$$b^m a = b^n a,$$

再由左消去律, 两边消去 b^n 得

$$b^{m-n} a = a.$$

由于上式对一切 $a \in M$ 成立, 因此 b^{m-n} 是一个左幺元. □

注意: (*) 这一步时不能直接消去 b^n !

第二题

第二题 (25 分)

设 M 为一有限半群, 定义左幺元为 M 中的一元素 e , 使 $ex = x, \forall x \in M$; 称 M 有左消去律, 若对任意的 $x, y, z \in M$, 若 $xy = xz$ 就有 $y = z$. 类似定义右幺元和右消去律.

- 证明 M 为群当且仅当 M 同时有左消去律和右消去律.

3. 证明: 由 (2) 知 M 含左、右幺, 再由 (1) 知 M 含幺. 只需验证 M 中任一元素可逆.

对任意 $a \in M$, 由 M 有限, 故存在 $m > n \in \mathbb{N}$ 使 $a^m = a^n$, 因此

$$a^{m-n} = e, \quad \text{i.e. } a \cdot a^{m-n-1} = a^{m-n-1} \cdot a = e.$$

即 a^{m-n-1} 是 a 的一个逆元, 从而 a 可逆.



第二题

第二题 (25 分)

设 M 为一有限半群, 定义左么元为 M 中的一元素 e , 使 $ex = x, \forall x \in M$; 称 M 有左消去律, 若对任意的 $x, y, z \in M$, 若 $xy = xz$ 就有 $y = z$. 类似定义右么元和右消去律.

- 举一有左消去律但无右消去律的半群的例子 (不要求有限).

4. 证明: 考虑 $[-1, 1]$ 到自身的单射构成的集合 M , 我们证明其在复合运算 $\circ$ 下是满足条件的半群.

先说明 M 是半群. 结合性显然. 封闭性, 由 f, g 单可知对任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ 有

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

因此 $f \circ g$ 也是 $[-1, 1]$ 上的单射, $f \circ g \in M$, 从而 M 对复合运算封闭.

再说明 M 上左消去律成立. 由单射的性质, 对任意 $x \in [-1, 1]$, $f, g, h \in M$, 都有

$$f(g(x)) = f(h(x)) \Rightarrow g(x) = h(x).$$

由 x 的任意性, 即说明 $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$, 左消去律得证.

第二题

第二题 (25 分)

设 M 为一有限半群, 定义左幺元为 M 中的一元素 e , 使 $ex = x, \forall x \in M$; 称 M 有左消去律, 若对任意的 $x, y, z \in M$, 若 $xy = xz$ 就有 $y = z$. 类似定义右幺元和右消去律.

- 举一有左消去律但无右消去律的半群的例子 (不要求有限).

4. 证明: 考虑 $[-1, 1]$ 到自身的单射构成的集合 M , 我们证明其在复合运算 $\circ$ 下是满足条件的半群.

最后说明右消去律不成立. 令

$$f(x) = \frac{x+1}{2}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}.$$

则

$$g(f(x)) = h(f(x)) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2, \quad \text{i.e. } g \circ f = h \circ f.$$

但 $g \neq h$, 这就给出了右消去律不成立的反例.

综上, 我们给出的半群 M 是有左消去律但无右消去律的半群的例子.



第二题

第二题 (25 分)

设 M 为一有限半群，定义左幺元为 M 中的一元素 e ，使 $ex = x, \forall x \in M$ ；称 M 有左消去律，若对任意的 $x, y, z \in M$ ，若 $xy = xz$ 就有 $y = z$ 。类似定义右幺元和右消去律。

- 3 中的结论对无限半群成立吗？给出你的判断并陈述理由。

5. 证明：不成立。如乘法半群 $(2\mathbb{Z}, \times)$ ，其上二消去律成立，但没有幺元，因此不是一个群。



第三题

第三题 (15 分)

设 G 为一群, N_1, N_2 为 G 的两个正规子群, 且 $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.

- 1. 证明 $N_1 \triangleleft C_G(N_2)$.
- 2. 若 $|G| = 665$, 证明 G 为循环群.
- 3. 在 (2) 的条件下, 求 G 的自同构数量.

第三题

第三题 (15 分)

设 G 为一群, N_1, N_2 为 G 的两个正规子群, 且 $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.

- 1. 证明 $N_1 \triangleleft C_G(N_2)$.
- 2. 若 $|G| = 665$, 证明 G 为循环群.
- 3. 在 (2) 的条件下, 求 G 的自同构数量.

简评: 第一问的实质是有限生成 Abel 群一章后半段中直积性质定理的一段证明过程.

第二问中, 要证明 G 是循环群, 虽说一个想法是找出生成元, 但找出生成元不太可能 (笑) 另一种方法就是将其表示为互异素数阶循环群的直积. 这需要我们找出一些群, 使得能由其直积得到 G ——当然最好是从 G 里面找了. 由什么方法, 可以找出 G 中的素数阶群呢?

第三问则是对第二问的深化: 循环群的自同构数量. 这是代数学基础中讨论的问题.

第三题

第三题 (15 分)

设 G 为一群, N_1, N_2 为 G 的两个正规子群, 且 $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.

- 1. 证明 $N_1 \triangleleft C_G(N_2)$.

1. 证明: 由 $N_1 \triangleleft G$, 若 $N_1 \leq C_G(N_2)$ 就立得 $N_1 \triangleleft C_G(N_2)$, 因此仅需说明 $N_1 \leq C_G(N_2)$.

任取 $g \in N_1$. 对任意的 $h \in N_2$, 我们有

$$N_1 = gN_1 \ni ghg^{-1}h^{-1} \in N_2h^{-1} = N_2,$$

所以 $ghg^{-1}h^{-1} \in N_1 \cap N_2 = \{e\}$, 故 $ghg^{-1}h^{-1} = e$, $gh = hg$. 由 h 的任意性, 故 $g \in C_G(N_2)$.

由 g 的任意性知 $N_1 \subset C_G(N_2)$, 因此 $N_1 \leq C_G(N_2)$. □

第三题

第三题 (15 分)

设 G 为一群, N_1, N_2 为 G 的两个正规子群, 且 $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.

- 2. 若 $|G| = 665$, 证明 G 为循环群.

2. 证明: 由 $|G| = 665 = 5 \times 7 \times 19$, 由 Sylow 定理知其存在 5 阶子群 A 、7 阶子群 B 及 19 阶子群 C . 其中各阶子群对应的个数为:

- $n(5) = 5l + 1 \mid 665$, 即 $5l + 1 \mid 7$ 或 $5l + 1 \mid 19$, 故 $l = 0$, $n(5) = 1$;
- $n(7) = 7m + 1 \mid 665$, 即 $7m + 1 \mid 5$ 或 $7m + 1 \mid 19$, 故 $m = 0$, $n(7) = 1$;
- $n(19) = 19n + 1 \mid 665$, 即 $19n + 1 \mid 5$ 或 $19n + 1 \mid 7$, 故 $n = 0$, $n(19) = 1$.

故各类子群分别有且仅有一个, A, B, C 为正规子群.

由 Lagrange 定理, AB 中元素的阶数只可能为 1, 5, 7, 35, 而 C 中元素的阶数只可能为 1, 19, 因此 $AB \cap C$ 中元素的阶数只可能为 1, 即 $AB \cap C = \{e\}$. 同理有 $BC \cap A = CA \cap B = \{e\}$.

因此, 群的积 ABC 为直积: $ABC \cong A \times B \times C$. 注意到 $|ABC| = 665 = |G|$ 且 $ABC \leq G$, 因此 $ABC = G$, 即 $G \cong A \times B \times C \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{19}$, 故 G 为 665 阶循环群. □

第三题

第三题 (15 分)

设 G 为一群, N_1, N_2 为 G 的两个正规子群, 且 $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.

- 3. 在 (2) 的条件下, 求 G 的自同构数量.

3. 解答: $G = \mathbb{Z}_{665}$, 设 $\sigma \in \text{Aut}(G)$, 令 $\sigma(1) = a$, 由加法群知

$$\sigma(k) = ka, \quad k \in \mathbb{Z}_{665}.$$

故 σ 为同构当且仅当 a 与 665 互质. 每一个自同构都对应于一个 a , 因此自同构的个数是

$$\phi(665) = \phi(5)\phi(7)\phi(19) = 4 \times 6 \times 18 = 432.$$

另一种计算方法: 也可以用容斥原理计算. a 与 665 不互质的情况, 要么 a 是 5 的倍数 (记这些情况为集合 A), 要么是 7 的倍数 (记为集合 B), 要么是 19 的倍数 (记为集合 C), 于是同构的个数是

$$\begin{aligned} \phi(665) &= 665 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|) \\ &= 665 - \underbrace{(7 \times 19)}_{5 \text{ 的倍数}} + \underbrace{(5 \times 19)}_{7 \text{ 的倍数}} + \underbrace{(5 \times 7)}_{19 \text{ 的倍数}} - \underbrace{5}_{133} - \underbrace{7}_{95} - \underbrace{19}_{35} + \underbrace{1}_{665} = 432. \end{aligned}$$

第四题

第四题 (15 分)

- 1. 证明 $(\mathbb{Q}^+, \times)$ 为自由群, 并写出该群的一组基.
- 2. 是否存在由 $(\mathbb{Q}^+, \times)$ 到 $(\mathbb{Q}, +)$ 的非平凡群同态?
- 3. 决定所有的 1800 阶 Abel 群.

第四题

第四题 (15 分)

- 1. 证明 $(\mathbb{Q}^+, \times)$ 为自由群, 并写出该群的一组基.
- 2. 是否存在由 $(\mathbb{Q}^+, \times)$ 到 $(\mathbb{Q}, +)$ 的非平凡群同态?
- 3. 决定所有的 1800 阶 Abel 群.

简评: 第一问要求对自由群定义熟练掌握.

第三问是简单的送分题, 有关有限生成 Abel 群的结构定理. 列的时候要注意不重不漏.

第二问, 在练习的时候做过类似的题: 证明正有理数乘法群和有理数加法群之间不存在同构. 本题应也是类似的思路. 是, 是吗.....

第四题

第四题 (15 分)

- 1. 证明 $(\mathbb{Q}^+, \times)$ 为自由群, 并写出该群的一组基.

1. **证明:** 注意到, 每个正有理数 q 可写为

$$q = \prod_{n=1}^{\infty} p_n^{\alpha_n}.$$

这里 p_n 为第 n 个素数, α_n 为整数, 且除至多有限个以外为 0. 由自由群的定义, 乘法群 $\mathbb{Q}^+$ 是由素数集 $\{p_1, p_2, \dots\}$ 生成的自由群, 一组基为素数集. □

第四题

第四题 (15 分)

- 2. 是否存在由 $(\mathbb{Q}^+, \times)$ 到 $(\mathbb{Q}, +)$ 的非平凡群同态? 坑! 猜你是不是以为没有?

2. 证明: 存在!

对任一正有理数 $q \in \mathbb{Q}^+$, 其可唯一表示为 $2^n m$ 的形式, 这里 n 为整数, m 为分子、分母均不含因数 2 的有理数 (即 $m = p/q$, $(p, q) = (p, 2) = (q, 2) = 1$). 则下面的映射:

$$\varphi : (\mathbb{Q}^+, \times) \rightarrow (\mathbb{Q}, +), \quad q = 2^n m \mapsto n$$

是一个同态.



第四题

第四题 (15 分)

- 3. 决定所有的 1800 阶 Abel 群.

3. 解答: $1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$. 由有限生成 Abel 群结构定理, 所有 1800 阶 Abel 群有

$$\begin{array}{lll}
 \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_5^2 & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_5^2 & \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_5^2 \\
 \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5^2 & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5^2 & \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5^2 \\
 \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_{25} & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_{25} & \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_{25} \\
 \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25} & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25} & \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25}
 \end{array}$$



第五题

第五题 (25 分)

- 1. 找出 S_4 的所有正规子群.
- 2. 给出 S_4 和 S_6 的一个 Sylow 2-子群.
- 3. 若 $f: S_4 \rightarrow S_4$ 为 S_4 到自身的群同态, 证明对任意 $x, y \in S_4$, 若 x, y 同型, 则 $f(x), f(y)$ 同型.
- 4. 设 f 为 S_4 到自身的群同构, 证明对于任意的 $x \in S_4$, x 与 $f(x)$ 同型.
- 5. 证明 S_4 的自同构只有内自同构.

第五题

第五题 (25 分)

- 1. 找出 S_4 的所有正规子群.
- 2. 给出 S_4 和 S_6 的一个 Sylow 2-子群.
- 3. 若 $f: S_4 \rightarrow S_4$ 为 S_4 到自身的群同态, 证明对任意 $x, y \in S_4$, 若 x, y 同型, 则 $f(x), f(y)$ 同型.
- 4. 设 f 为 S_4 到自身的群同构, 证明对于任意的 $x \in S_4$, x 与 $f(x)$ 同型.
- 5. 证明 S_4 的自同构只有内自同构.

简评: 第一问要求熟练掌握 S_4 的结构, 熟练应用型的视角. 第三、四问要求对置换群的知识熟悉, 理解置换的型对应于共轭类的本质.

第二问要求对简单的置换群有所了解, 同时要考虑一些构造的小技巧.

第五问较难, 内自同态相关的问题往往要么是使用奇怪的群论技巧, 要么是朴实无华的构造. 这里采取直接构造的思路, 强型把自同构化为内自同构的形式.

第五题

第五题 (25 分)

- 找出 S_4 的所有正规子群.

1. 解答: S_4 的正规子群在共轭作用下不变, 则其由单位元及一个或多个共轭类组成. 而 S_4 中各置换的共轭类为 (型) 为

$[1^4]$	单位元, 1 个	$[1^2 2^1]$	对换, 6 个
$[2^2]$	不交对换之积, 3 个	$[1^1 3^1]$	三轮换, 8 个
$[4^1]$	四轮换, 6 个		

由 Lagrange 定理, S_4 的子群只可能为 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 阶, 1 及 24 阶是平凡的, 2、3、6、8 阶不能由“一个单位元 + 若干共轭类”拼出, 4 阶的情形有且仅有 $[1^4] \cup [2^2]$, 即 Klein 四元群 K_4 ; 12 阶的情形有且仅有 $[1^4] \cup [2^2] \cup [1^1 3^1]$, 即 A_4 .

综上, 正规子群有且仅有 K_4 及 A_4 .



第五题

第五题 (25 分)

- 给出 S_4 和 S_6 的一个 Sylow 2-子群.

2. 解答: $|S_4| = 24 = 2^3 \times 3$, 其 Sylow 2-子群为 8 阶群, 注意到二面体群 $D_4 \leq S_4$ 正好满足条件, 故一个例子为 D_4 .

$|S_6| = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$, 其 Sylow 2-子群为 16 阶群. 注意到

$$D_4 \times \langle (56) \rangle = \{ab \in S_6 : a \in D_4, b = 1 \text{ 或 } (56)\}$$

正好是 S_6 中的 16 阶群, 故一个例子为 $D_4 \times \langle (56) \rangle$.



第五题

第五题 (25 分)

- 若 $f: S_4 \rightarrow S_4$ 为 S_4 到自身的群同态, 证明对任意 $x, y \in S_4$, 若 x, y 同型, 则 $f(x), f(y)$ 同型.

3. 证明: 只需验证若 x, y 在一个共轭类中, 则 $f(x), f(y)$ 也在同一个共轭类中. 注意到若 x, y 同型, 则存在 $g \in G$ 使 $gxg^{-1} = y$, 于是

$$f(g)f(x)f(g)^{-1} = f(gxg^{-1}) = f(y).$$

即 $f(x), f(y)$ 仍在同一个共轭类中, 因此同型.



第五题

第五题 (25 分)

- 设 f 为 S_4 到自身的群同构, 证明对于任意的 $x \in S_4$, x 与 $f(x)$ 同型.

4. 证明: f 为同构, 故保持各元素的阶数. 一阶元只有单位元, 三阶元只有三轮换, 四阶元只有四轮换, 因此 f 保持 1^4 、 $1^1 3^1$ 、 4^1 型置换的型. 只需说明其保持 $1^2 2^1$ 及 2^2 型置换的型即可.

由第 3 问知, 若 x 与 y 共轭, 则 $f(x)$ 与 $f(y)$ 共轭, f 将共轭类打到共轭类; 又由于 f 是同构, 故 f 为双射, 共轭类 $[x]$ 与其像 $[f(x)]$ 的大小应当相同. 注意到共轭类 $[1^2 2^1]$ 有 6 个元素, $[2^2]$ 有 3 个元素, 因此 $[1^2 2^1]$ 不能经由 f 变为 $[2^2]$; 但 $[1^2 2^1]$ 中的置换为二阶置换, 其像应位于 $[1^2 2^1] \cup [2^2]$ 中, 因此 $[1^2 2^1]$ 被打到 $[1^2 2^1]$, 故 $[2^2]$ 被打到 $[2^2]$, 即 f 也保持 $1^2 2^1$ 及 2^2 型置换的型不变.

综上, x 与 $f(x)$ 同型.



第五题

第五题 (25 分)

- 证明 S_4 的自同构只有内自同构.

5. 证明: 对任一个自同构 $f \in \text{Aut}(S_4)$, 我们下面把其作为内自同构的形式构造出来.

由前两问知, S_4 的自同构 $f(s)$ 保持各共轭类不变. 设 $f((12)) = (ab)$, 则

$$(2b)(1a)f((12))(1a)(2b) = (12).$$

令 $\phi(s) = (2b)(1a)f(s)(1a)(2b)$, 则 $\phi((12)) = (12)$.

设 $\phi((13)) = (pq)$, 则 $(pq) \neq (34)$. 否则由 $\phi((12)) = (12)$, 二式相乘得 $\phi((132)) = (12)(34)$, 不同型, 与第 4 问矛盾. 因此可设 p 为 1,2 之一, q 为 3,4 之一. 再令

$$\mu(s) = (3q)(1p)g(s)(1p)(3q)$$

则 $\mu((13)) = (13)$, 且 $\mu((12)) = (12)$: 因为 $(3q)$ 与 (12) 不交且 $(1p)$ 要么恒等、要么就是 (12) .

第五题

第五题 (25 分)

- 证明 S_4 的自同构只有内自同构.

5. 证明: 对任一个自同构 $f \in \text{Aut}(S_4)$, 我们下面把其作为内自同构的形式构造出来.

我们下面证明 $\mu((14)) = (14)$.

设 $\mu((14)) = (\omega\xi)$. 则 ω, ξ 中至少有一个为 4; 否则, $(12), (13), (14)$ 生成 S_4 , 但对应的像只能生成 S_3 , 与自同构矛盾. 故可设 $h((14)) = (\omega 4)$, $\omega = 1, 2$ 或 3 .

若 $\omega = 2$, 则 $h((143)) = h((13))h((14)) = (13)(24)$, 但 (143) 与 $(13)(24)$ 不同型, 矛盾.

若 $\omega = 3$, 则 $h((142)) = h((12))h((14)) = (12)(34)$, 但 (142) 与 $(12)(34)$ 不同型, 矛盾.

综上, $\omega = 1$. 此时 $\mu((12)) = (12), \mu((13)) = (13), \mu((14)) = (14)$. 由于 $(12), (13), (14)$ 生成 S_4 , 这说明自同构 $\mu(s)$ 是恒等映射, $\mu(s) = s$. 故自同构 f 为

$$f(s) = (1a)(2b)(1p)(3q)s(3q)(1p)(2b)(1s)$$

是内自同构.



第六题

第六题 (15 分)

设 V 为一 n 维的 $\mathbb{R}$ 上线性空间, 称一长为 $n+1$ 的子空间列为 V 中的完备旗, 若

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

记 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 而所有完备旗组成的集合为 $\mathcal{F}$.

- 1. 证明 G 在 V 上的左乘作用诱导了 G 在 $\mathcal{F}$ 上的群作用.
- 2. 设 $W_k = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}e_i$ ($k = 1, 2, \cdots, n$), 其中 e_i 为只有第 i 个分量为 1、其余分量为 0 的向量, 求完备旗 $(W_0, W_1, \cdots, W_n) \in \mathcal{F}$ 在 (1) 中所示的群作用下的稳定子群.
- 3. 设 $T \leq G$ 为所有可逆上三角阵全体, 试给出 G 关于 T 的一个左陪集完全代表元系.

第六题

第六题 (15 分)

设 V 为一 n 维的 $\mathbb{R}$ 上线性空间, 称一长为 $n+1$ 的子空间列为 V 中的完备旗, 若

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

记 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 而所有完备旗组成的集合为 $\mathcal{F}$.

- 1. 证明 G 在 V 上的左乘作用诱导了 G 在 $\mathcal{F}$ 上的群作用.
- 2. 设 $W_k = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}e_i$ ($k = 1, 2, \cdots, n$), 其中 e_i 为只有第 i 个分量为 1、其余分量为 0 的向量, 求完备旗 $(W_0, W_1, \cdots, W_n) \in \mathcal{F}$ 在 (1) 中所示的群作用下的稳定子群.
- 3. 设 $T \leq G$ 为所有可逆上三角阵全体, 试给出 G 关于 T 的一个左陪集完全代表元系.

简评: 你甚至可以在近世代数卷子里做到近世代数.

第六题

第六题 (15 分)

设 V 为一 n 维的 $\mathbb{R}$ 上线性空间, 称一长为 $n+1$ 的子空间列为 V 中的完备旗, 若

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

记 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 而所有完备旗组成的集合为 $\mathcal{F}$.

- 1. 证明 G 在 V 上的左乘作用诱导了 G 在 $\mathcal{F}$ 上的群作用.

1. 证明: G 对 V 的左乘作用诱导如下的映射

$$\rho: G \rightarrow S(\mathcal{F}): g \mapsto \rho_g$$

这里双射 $\rho_g: (V_0, \cdots, V_n) \mapsto (gV_0, \cdots, gV_n)$. 为证明左乘诱导群作用, 只需验证 ρ 是同态.

对任意 $g, h \in G$, $(V_0, \cdots, V_n) \in \mathcal{F}$, 由

$$\begin{aligned} (\rho(g) \circ \rho(h))(V_0, \cdots, V_n) &= \rho(g)(hV_0, \cdots, hV_n) \\ &= (ghV_0, \cdots, ghV_n) \\ &= \rho(gh)(V_0, \cdots, V_n). \end{aligned}$$

因此 $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(gh)$, 故 ρ 是同态, 因此左乘诱导了一个群作用.



第六题

第六题 (15 分)

设 V 为一 n 维的 $\mathbb{R}$ 上线性空间, 称一长为 $n+1$ 的子空间列为 V 中的完备旗, 若

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

记 $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, 而所有完备旗组成的集合为 $\mathcal{F}$.

- 2. 设 $W_k = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}e_i$ ($k = 1, 2, \cdots, n$), 其中 e_i 为只有第 i 个分量为 1、其余分量为 0 的向量, 求完备旗 $(W_0, W_1, \cdots, W_n) \in \mathcal{F}$ 在 (1) 中所示的群作用下的稳定子群.

2. 解答: 设 $H \leq G$ 为其稳定子群, 则 $\forall h \in H$, 有 $hW_k = W_k$, $\forall k = 0, 1, \cdots, n$. 对任意 $m \in G$, 我们证明 $m \in H$ 当且仅当 m 是可逆的上三角矩阵.

必要性 对任意 $k = 1, 2, \cdots, n$, 作分块 $m = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$, $A_k \in \mathbb{R}^k$. 由 $mW_k = W_k$, 则对任一

$v = (\alpha, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ (这里 $\alpha \in \mathbb{R}^{1 \times k}$) 都有 $mv = (\alpha A_k^T, \alpha C_k^T)^T \in W_k$, 因此 $C_k \alpha^T = 0$ 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 均成立, 故 $C_k = 0$. 由于对任意 k 都有 $C_k = 0$, 故 m 是上三角矩阵.

充分性 若 m 为可逆上三角矩阵, 则对任意 k , 上面的分块中恒有 $C_k = 0$. 对任意 $v \in W_k$, 设 $v = (\alpha, 0)^T$, $\alpha \in \mathbb{R}^{1 \times k}$, 则 $mv = (\alpha A_k^T, 0)^T \in W_k$, 这说明 $mW_k \subset W_k$. 由 m 可逆, 故 $mW_k = W_k$.

综上, 上述命题证毕, 故 $(W_0, \cdots, W_n)$ 的稳定子群是 G 中可逆上三角矩阵群. □

第六题

第六题 (15 分)

设 V 为一 n 维的 $\mathbb{R}$ 上线性空间, 称一长为 $n+1$ 的子空间列为 V 中的完备旗, 若

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

记 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 而所有完备旗组成的集合为 $\mathcal{F}$.

- 3. 设 $T \leq G$ 为所有可逆上三角阵全体, 试给出 G 关于 T 的一个左陪集完全代表元系.

3. 解答: 我们证明全体对角元为 1 的下三角阵构成的集合 S 是 G 关于 T 的一个左陪集完全代表元系.

引理 (LU 分解)

设 M 为一个矩阵, 则存在上三角阵 U 及对角元为 1 的下三角阵 L , 使 $M = LU$.

引理的证明: 由对方程组 $Mx = 0$ 高斯消元的上三角化过程, 存在对角元为 1 的初等下三角方阵 $P_1, \cdots, P_m$ 使 $P_m P_{m-1} \cdots P_1 M$ 为上三角阵, 记其为 U , $P_1^{-1} \cdots P_m^{-1} = L$, 则 $M = LU$ 满足要求. $\square$

第六题

第六题 (15 分)

设 V 为一 n 维的 $\mathbb{R}$ 上线性空间, 称一长为 $n+1$ 的子空间列为 V 中的完备旗, 若

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

记 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 而所有完备旗组成的集合为 $\mathcal{F}$.

- 3. 设 $T \leq G$ 为所有可逆上三角阵全体, 试给出 G 关于 T 的一个左陪集完全代表元系.

3. 解答: 我们证明全体对角元为 1 的下三角阵构成的集合 S 是 G 关于 T 的一个左陪集完全代表元系.

回到原题. 由引理可知, 对任意的 $g \in G$, 存在 $l \in S, t \in T$ 使 $g = lt$, 故

$$G = \bigcup_{l \in S} lT.$$

下面说明上面的并不是不交并. 若下三角阵 l_1, l_2 满足 $l_1 T = l_2 T$, 则 $l_1 l_2^{-1} \in T$, 但左边是下三角阵, 右边是上三角阵, 这说明只能 $l_1 l_2^{-1}$ 是对角阵, 再由对角元为 1 知是单位阵 I_n . 于是 $l_1 = l_2$. 这就说明上面的分解为不交并.

综上, 全体对角元为 1 的下三角阵构成的集合 S 是 G 关于 T 的一个左陪集完全代表元系. □

「近世代数」往年试题讲评

2024 刘班、叶班卷

骆沛荣

2025 年 4 月

中国科学技术大学数学科学学院

2023 级本科 3 班